عدد المسائل:خمس
المدة :4 ساعات

امتحان الفصل الأول
المادة:رياضيات

ثانوية راس بعلبك الرسمية
الصف: العلوم العامة
استاذ المادة : عبدو اللقيس

I - (8 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$,On donne le point A(1;-1;1) et les deux droites :

$$(d):\begin{cases}x=t+1\\y=2t-1\\z=-t+1\end{cases} \quad \text{et} \quad (d'):\begin{cases}x=2m-1\\y=m-2\\z=m\end{cases}$$

a) Montrez que ces deux droites sont concourantes en A.
b) Trouvez une équation du plan (P) formé par (d) et (d').
c) Trouvez une équation du plan (Q) contenant (d) et perpendiculaire à (P).
d) Soit le point E(4;2;1)
1- Vérifiez que E est un point de (P).
2- Trouvez une équation du plan (R) passant par E et perpendiculaire à (d).
3- Trouvez les coordonnées du point B intersection de (d) et (R) et déduisez la distance de E à (d).
4- Trouvez les coordonnées du point C de (d') si $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{V'}=0$ où $\overrightarrow{V'}$ est un vecteur directeur de (d').
5- Que représente C pour E? , En déduire la distance de E à (d') et vérifiez qu'elle est égale à la distance de E à (
6- Trouvez les équations des deux bissectrices de l'angle formé par (d) et (d').

II- (7 points)

On donne un parallélogramme ABCD, et un point I de [BD], la parallèle me
(CD) en N, et la parallèle menée de I à (AB) coupe (BC) en P et (AD) en Q.
1-Dans cette partie on va trouver la position de I si (MQ) est parallèle à (DB).
a- Dans ce cas, Justifiez l'existence d'une homothétie de centre A qui transforme M en B et Q en D.
b- Démontrez que l'image de I par cette homothétie est C.
c- En déduire que I est alors milieu de [BD].
2- Dans cette partie I n'est pas milieu de [BD].(MQ) et (BD) se coupent en un point E.
Soit h l'homothétie de centre E qui transforme I en D.
a- Trouvez l'image de M par h.
b- Trouvez l'image de B par h.
c- Trouvez l'image de P par h.
d- Construisez l'image de C par h.
e- Construisez le point F dont l'image par h est

III- (8 points)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$, les points A et B ont respectivement pour affi 1 et 4, (d) est la droite (OA) privée de A, (Δ) la droite perpendiculaire en A à (d) privée de A et (Γ) le cercle d Centre A et de rayon 1. f est l'application qui à tout point m d'affixe z différent de 1 associe le point M d'affi

$$Z=f(z)=\frac{z^2}{z-1}$$

A- On note g et h les fonctions :

$$g(x)=\frac{x^2}{x-1} \text{ avec } x \in D=]-\infty;1[\cup]1;+\infty[\quad \text{et} \quad h(x)=\frac{x^2-1}{x} \text{ avec } x \in D'=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$$

1- Etudiez les variations de g et h sur leurs domaines de définition D et D'.
2- Etudiez les limites de g et h aux bornes des domaines.
3- Dressez les tableaux de variations de g et h.
4- Déterminez g(D) et h(D')

B- 1- On suppose dans cette question que M a pour affixe 3.Ecrivez sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle les affixes z de m telles que f(z)=3.

2- On suppose dans cette question que $z=1+e^{i\theta}$ $(\theta \in IR)$
a- Calculez, en fonction de θ, l'affixe Z de M.
b- Déduisez l'ensemble des points M quand θ varie.

3- On pose $z=x+iy$ et $Z=X+iY$ où x ,y ,X et Y sont réels.
a- Calculez X et Y en fonction de x et y.
b- Quel est l'ensemble des points M lorsque le point m décrit (d).
c- Quel est l'ensemble des points M lorsque le point m décrit (Δ).
d- Quel est l'ensemble des points m lorsque le point M décrit l'axe $(O,\vec{u})$

IV- (5 points)

1- Démontrez que :

a) $1+2+3+......+n=\frac{n(n+1)}{2}$

b) $1^2+2^2+3^2+........+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2) Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\ln(1+x)-x$
a) Démontrez que f est décroissante .
b) Calculez f(0) et déduire le signe de f(x).

3) Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$
a) Démontrez que g est croissante .
b) Calculez g(0) et déduire le signe de g(x).

4) Déduire que pour tout entier naturel non nul n, et pour tout entier naturel non nul k ,on a:

$$\frac{k}{n^2}-\frac{k^2}{2n^4}<\ln(1+\frac{k}{n^2})<\frac{k}{n^2}$$

5) Déduisez que $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n^2})(1+\frac{2}{n^2})(1+\frac{3}{n^2}).......(1+\frac{n}{n^2})=\sqrt{e}$