ثانوية راس بعلبك الرسمية العلوم العامة	مسابقة في الرياضيات	المدة:اربع ساعات

I- (3points)

On considère la fonction f définie sur $I =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2+x-3}{x-1}$

1) a- Montrer que $f(x) = x+2-\frac{1}{x-1}$.

   b- Etudier les variations de f et dresser le tableau de variations.

2) Montrer que l'équation f(x)=0 admet deux solutions dont l'une appartient à $]\frac{-5}{2};-2[$ et l'autre à $]1;\frac{3}{2}[$.

3) a- Etudier les variations de g(x)=x^2-2x+m sur IR et trouver g(IR)

   b- Trouver la valeur du minimum en fonction de m.

   c- Comment faut-il choisir m pour que fog existe, trouver alors fog(x).

4) Démontrer que f sur $]1,+\infty[$,admet une fonction réciproque.

5) Calculer $(f^{-1})'(3)$.

II- (2points)

Dans l'espace rapporté a un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$,on donne les points A(1,-2,1) , B(0,-1,-2) et C(2,1,2)

a. Montrer que ces points forment un plan (P).
b. Ecrire une équation du plan (P).
c. Calculer l'aire du triangle ABC.
d. En déduire la distance du point A à la droite (BC)
e. Soit le point D(1,-1,1). Montrer que D n'est pas un points de (P).
f. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.
g. En déduire la distance de D à (P).

III- (3points)

Dans l'espace rapporté a un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$,on donne le plan (P) :x-y-z+2=0 , le point A(1 ;-1 ;2) et la droite (d) : $\begin{cases} x = t-1 \\ y = -t \\ z = 2t+1 \end{cases}$

1) Démontrer qu'une équation du plan (Q) formé par A et (d) est x+3y+z=0
2) Montrer que (d) est contenue dans (P).
3) Soit M(t-1,-t,2t+1) un point variable de (d)
   a- Calculer t pour que (AM) soit perpendiculaire à (d).
   b- En déduire la distance de A à (d).
   c- Trouver le point N projection orthogonale de A sur (P), et déduire la distance de A à (P).
   d- En déduire la valeur du cosinus de l'angle aigu formé par (P) et (Q).
4) Soit dans le plan (Q) le cercle (C) de centre A et de rayon 3.
   a- Démontrer que (C) coupe (d) en deux points B et D(utilisez question 3-b).

b- Trouver une équation du plan médiateur de [BD].
c- Trouver les coordonnées du point I milieu de [BD].
d- Trouver les coordonnées de B et D.

IV- (3 points)

On considère la fonction f définie sur $I = [-1, 1]$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & si \quad x \neq 0 \\ 0 \quad si \quad x = 0 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé

1) Montrer que f est continue et dérivable en 0.
2) Montrer que f est impaire, et donner une interprétation graphique.
3) a) Vérifier que pour tout $x \in]0, 1[$, on a : $\dfrac{f(x)-1}{x-1} = \dfrac{1}{x}\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} - 1\right)$

   b) En déduire que f n'est pas dérivable ni à gauche en 1 ni à droite en -1. Interpréter graphiquement ces résultats.
4) a) Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, on a : $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\,(1+\sqrt{1-x^2})}$

   b) Dresser le tableau de variation de f
   c) Construire (C) et sa tangente au point O
5) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} et déterminer son domaine de définition.
   b) Construire la courbe de f^{-1} dans le même repère.
   c) Montrer que pour tout x de I on à : $f^{-1}(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$

V- (3,5 points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=(\ln x)^2+2\ln x-3$,et on désigne par (C) sa courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i},\vec{j})$

1) a- Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat.

b- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat

2) Déterminer les abscisses des points d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses.

3) a- Montrer que $f'(x)=\dfrac{2}{x}(1+\ln x)$ et dresser le tableau de variations de f.

b- Vérifier que $f''(x)=\dfrac{-2\ln x}{x^2}$ et montrer que (C) admet un point d'inflexion I, et écrire une équation de la tangente (d) à (C) en I.

4) Tracer la droite (d) et la courbe (C).

5) a-Démontrer que la fonction f admet sur $[1\ ;+\infty[$ une fonction réciproque g et déterminer le domaine de définition de g.

b-Vérifier que A(5 ;e^2) est un point de la courbe représentative (G) de g et écrire une équation de la tangente à (G) en A.

6) Déterminer graphiquement, suivant les valeurs du réel m, le nombre des racines de l'équation $(\ln x)^2+2\ln x=m$

VI- (3 points)

Soit z un nombre complexe non nul, dans le plan complexe $(O,\vec{u},\vec{v})$ A ,B et C sont les points d'affixes respectives z , $\bar{z}$ *et* $\dfrac{z^2}{\bar{z}}$.

1) Montrer que A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O.
2) Montrer que le triangle ABC est isocèle en A.
3) On suppose que la partie réelle de z est strictement positive, démontrer que $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})=\arg z\ [2\pi]$
4) à tout point M d'affixe $z\neq 0$, on associe le point M' d'affixe $z'=\bar{z}+\dfrac{z^2}{\bar{z}}$

a- Soit r le module de z et θ un argument de z, montrer que $z'=2\cos(2\theta)z$.

b- En déduire que O, M et M' sont alignés.

c- Déterminer et construire l'ensemble des points M tels que z'=z.

VII- (2,5 points)

Soit f la fonction définie sur [illegible] par $f(x)=x-1-\sqrt{x^2-4x+3}$,et on désigne par (C) sa courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i},\vec{j})$

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) a-Calculer les limites de f(x) en $-\infty$ et $+\infty$

b- Trouver les asymptotes alors.

3) Trouver les points d'arrêt et de départ et trouver les demi-tangentes alors.
4) Trouver la dérivée de f et dresser le tableau de variations.
5) Tracer (C).