I. (4 points)

Soit la fonction définie sur $]-\infty, +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}$ et (C) sa courbe représentative

Dans un système orthonormé.

1) Démontrer que $f(-x) = -f(x)$, et déduire l'élément de symétrie
2) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, et déduire $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
3) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de $f(x)$
4) Démontrer que $f(x)$ admet une fonction réciproque quef^{-1} et trouver cette fonction en précisant son domaine de définition
5) Construire, dans le même repère, (C) et le graphe $f^{-1}(x)$

II. (5 points)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct (O, $\vec{u}, \vec{v}$) on donne le point A d'affixe

$z_1 = 2 + 2i\sqrt{3}$ et le point B d'affixe $z_2 = 2\sqrt{2}(1+i)$

1) a- Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique
   b- Écrire$({z_1}^{15})$ sous forme algébrique
   c- Écrire $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique
   d- Vérifier que $z_1 = z_2\, e^{i\frac{\pi}{12}}$.
   e) En déduire les valeurs exactes de cos $\frac{\pi}{12}$ et sin $\frac{\pi}{12}$
2) Soit M un point variable d'affixe $z = 4e^{i\theta}$, où θ est un réel.
   a- Trouver l'ensemble des points M lorsque θ varie, et vérifier que cet ensemble passe par A et B
   b- Trouver un argument de z lorsque le triangle ABM est rectangle en A.
3) Soit le point N d'affixe $z_N = \frac{1}{8}(z_1)^2$. Déterminer la nature du triangle OAN.

III. (5 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le point A(1,1,2) et deux droites :

(d_1): $\begin{cases} x = t+1 \\ y = 2t-1 \\ z = -t \end{cases}$ et (d_2): $\begin{cases} x = m-1 \\ y = m-3 \\ z = -2m \end{cases}$

1) Démontrer que A et (d_1) forment un plan (P), et qu'une équation de ce plan est 3x-y+z-4=0
2) Démontrer que (d_1) et (d_2) sont non coplanaires
3) Soit M(m-1, m-3, -2m) un point variable de (d_2)
   a- Montrer que la distance de M à (P) est indépendante de m.
   b- En déduire la position de la droite (d_2) par rapport à (P).
   c- Vérifier que le point E $(\frac{-2}{3}, \frac{-8}{3}, \frac{-2}{3})$ est un point de (d_2).
   d- Soit f(m) = $AE^2 - AM^2$, calculer f(m) en fonction de m et démontrer que f(m)$\leq$ 0 pour tout m.

e- Déduire que E est la projection orthogonale de A sur (d_2).
f- Soit H la projection orthogonale de E sur (P), calculer AH.

IV. (6 points)

A. Soit la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = \ln(x+1) - \ln(x) + \frac{x}{x+1}$

1) Calculer la limite de $\ln(1+\frac{1}{x})$ quand $x \to +\infty$ et déduire alors la limite de $g(x)$
2) Démontrer que $g'(x) = \frac{-1}{x(x+1)^2}$, et déduire le sens de la variation de $g(x)$
3) En déduire que $g(x) > 1$.

B. Soit la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x\,[\ln(x+1] - \ln x]$ et (C) sa courbe représentative dans un système orthonormé.

1) Démontrer que la limite de $f(x) = x$ quand $x \to 0^+$, est égale 0
2) On pose $x = \frac{1}{t}$, démontrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t}$, et trouver cette limite.
3) Démontrer que $f'(x) = g(x) - 1$, et déduire le sens de variation de la concavité de $f(x)$.
4) Soit A le point de (C) d'abscisse x=1, trouver l'équation de la tangente (T) en A et à (C) et l'ordonnée du point d'intersection de (T) avec (y'y).
5) Construire (T) et (C), en prenant 4 cm l'unité de longueur.

V. (4 points)

On donne dans le plan, un triangle ABC tel que AB=6 cm, et le point D du segment [AB] tel que AD =4cm, G est le centre de gravité de ce triangle et I est le milieu de [BC].

Soit h_A l'homothétie de centre A, qui transforme D en B

1) Trouver l'image de G par h_A
2) Démontrer que la parallèle menée de B à (DC), et la parallèle menée de I à (GC) se coupent en un point sur la droite (AC).
3) Soit l'homothétie h_G de centre G et de rapport $\frac{-1}{2}$
   a- Quelle est la nature de $h_G o h_A$
   b- Trouver le point de $h_G o h_A$ (D)
   c- Trouver le point de $h_G o h_A$ (A)
   d- En déduire une construction du centre$h_G o h_A$

VI. (4 points)

On donne la suite numérique (u_n) par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{5u_n+1}{u_n+5}$ pour tout entier naturel n.

A. Étude de cette suite
   a- Démontrer que cette suite est minorée par 0
   b- Démontrer que cette suite est majorée par 1
   c- Démontrer que cette suite est croissante.
   d- Démontrer que cette suite est convergente et trouver sa limite

B. Étude du terme général
   a- Soit la suite numérique (v_n) définie par $v_n = \frac{1-u_n}{1+u_n}$, pour tout entier naturel n.
   Démontrer que cette suite est une suite géométrique et donner sa raison.
   b- Calculer v_n en fonction de n.
   c- Déduire u_n en fonction de n, et retrouver sa limite

VII. (12 points)

1) On considère la fonction f_1 définie sur $]-\infty, +\infty[$ par $f_1(x) = 2x - 2$ +ln$(x^2 + 1)$ et (C_1) sa courbe représentative dans un système orthonormé.

   a- Trouver les limites $f_1(x)$ *et de* $\frac{f_1(x)}{x}$ et de $f_1(x) - 2x$ lorsque $x \rightarrow -\infty$
   b- Trouver les limites $f_1(x)$ *et de* $\frac{f_1(x)}{x}$ et de $f_1(x) - 2x$ lorsque $x \rightarrow +\infty$
   c- Soit (d) la droite d'équation $y = 2x$, démontrer de (d) coupe (C_1) en deux points , et étudier les positions de (C_1) et de (d)
   d- Calculer $f'_1(x)$ et dresser le tableau de variation de f_1
   e- Démontrer $f_1(x)$ =0 admet une seule racine α_1 et que $0 < \alpha_1 < 1$
   f- Étudier la concavité de $f_1(x)$
   g- Démontrer que f_1 admet une fonction réciproque et calculer $(f^{-1})(-2)$
   h- Construire (C_1) et (d)

2) Soit n un entier naturel non nul. On considère la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln(x^2+1)}{n}$

   a- Déterminer la limite de $f_n(x)$ en $+\infty$
   b- Démontrer que la fonction $f_n(x)$ est croissante sur $[0, +\infty[$
   c- Démontrer que pour tout n , $f_n(x) = 0$ admet une seule racine α_n et que $0 < \alpha_n < 1$.

3) Étude de la suite (α_n)

   a- α_{n+1} est la racine de $f_{n+1}(x)$ =0, démontrer que $f_n(\alpha_{n+1})>0$
   b- Montrer que cette suite est croissante
   c- En déduire que cette suite est convergente
   d- Montrer que $\alpha_n = 1 - \frac{\ln(\alpha_n^2+1)}{2n}$, puis déduire la limite de cette suite.