Collège Elysée
Hazmieh

Année scolaire 2007-2008
Examen Blanc 1
Classe de SG
Durée 240 minutes

Composition de Mathématiques

L'usage de la calculatrice non programmable est autorisé

N-1 (4pts)

1- On considère l'équation d'inconnue complexe z :

$$(E) \quad z^3 + 5z^2 + 11z + 15 = 0.$$

a) Montrer qu'il existe trois réels a,,b et c tels que,pour tout nombre complexe z,

$$z^3+5z^2+11z+15=(z+3)(az^2+bz+c)$$

Déterminer a,b et c.

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E).

2- Le pain complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O;\vec{u};\vec{v}\right)$.Les points A,B et D du plan ont pour affixes respectives -3 , $z_1=-1+2i$ et $z_2=-1-2i$.

a) Simplifier l'expression du quotient $\dfrac{z_1+3}{z_2+3}$.

b) En déduire la nature du triangle ABD.

c) Déterminer l'affixe du point C tel que ABCD soit un carré.

N-2 (4pts)

Soit $I=]2;+\infty[$ et f la fonction défine par: $f(x)=\dfrac{2x^2-7x-9}{x-2}$.

a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1}.

b) Exprimer f^{-1} ,puis tracer la courbe representative de f^{-1}

N-3 - (8pts)

On définit deux suites u et v par u_0=1 , et v_0=12 et pour tout entier naturel n:

$u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$ et $v_{n+1} = \frac{1}{4}(u_n + 3v_n)$.

1- on appelle w la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - u_n$.

a) Montrer que w est une suite géométrique à termes positives,dont on précisera la raison.

b) Déterminer la limite de la suite w.

2- a) Montrer que la suite u est croissante.

b) Montrer que la suite v est décroissante.

c) En déduire que , pour tout entier n, $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$

3- Montrer que les suites u et v convergent et qu'elles ont meme limite que l'on appellera l.

4- On appelle t la suite définie pour tout entier naturel n par $t_n = 3u_n + 8v_n$.

a) Montrer que t est une suite constante.Déterminer cette constante

b) Déterminer alors la valeur de l.

N-4- (6pts)

Le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O; \vec{u} ; \vec{v}\right)$.Soit A un point de P d'affixe a non nulle et soit ABC le triangle équilateral inscrit dans le cercle de centre O ,de rayon OA et tel que $(\vec{AB}, \vec{AC})$ soit de mesure $\frac{\pi}{3}$.

1- Déterminer ,en fonction de a,les affixes b et c des points B et C respectivement .

2- On désigne par M le point d'affixes $z = a^3$. Déterminer A pour que M soit le milieu de [BC].

3- Dans cette question , le point A décrit le cercle de centre le point d'affixe i et de rayon 2.

Déterminer l'ensemble des points N tels que le quadrilatère ABNC soit un losange

N-5- (8pts)

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormé (Ox ; Oy). On appelle T la transformation qui au point M,associe le point M'(x' ; y') tel que

$$T\begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = \dfrac{y}{x}(2 - x) \end{cases}$$ on note T(M) =M'

1- Quelle est l'ensemble E des points M tells que T(M) existe?

Quel est l'ensemble F des points M de E tells que T(M) $\in$ E

2- Montrer que T est involutive

3- Quel est l'ensemble des points M tels que T(M)=M?

4- Quel est l'ensemble des transformés des points d'une droite passant par O.

5- Que peut-on dire des trois points O,M et M' = T(M)?

Quel est l'ensemble des positions du milieu I de [MM'] lorsque M décrit E?

N-6- (10pts)

n étant un entier naturel non nul,on se propose d'étudier la famille des fonctions f_n,définies sur $[0;+\infty[$ par: $f_n(x) = x^n(1 - \ln x)$ si $x > 0$ et $f_n(0) = 0$.

On désigne par (C_n) la représentation graphique de f_n dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unités :4 cm).

1- a) Montrer que toute fonction f_n est continue en 0.

b) Discuter selon les valeurs de n la dérivabilité de f_n en 0.Interpréter graphiquement ce résultat.

c) Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.

2- a) Etudier suivant les valeurs de x le signe de l'expression: $f_{n+1} - f_n$ et préciser les valeurs de x pour lesquelles elle s'annule.

b) En déduire la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1}) et montrer que toutes les courbes (C_n) passent par trois points fixes dont on précisera les coordonnées.

3-a) Etudier les vaiations de f_n et dresser son tableau de variations.

b) Pour $n \geq 1$, détérminer en fonction de n,une équation de la tangente à (C_n) en chacun des points d'abscisses 1 et e.

c) En utilisant les resultants precedents, construire sur un même graphique les courbes (C_1) *et* (C_3)

Bonne chance