Lycée officiel Ras-Baalbeck Maths SG (4 heures)

I-Exercices

1- a) Démontre que $\arctan(\frac{1}{2}) + \arctan(\frac{1}{3}) = \frac{\pi}{4}$

b) Déduis la valeur de arctan2 + arctan3

2- Soit $f(x) = 3 - \sqrt{x^2 + 1}$

a) Calcule les limites de $f(x)$ quand $x \to \pm\infty$

b) Etudie les variations de $f(x)$

c) On définie g(x)= $f(x)$ si $x \in [0,+\infty[$ .Démontre que g(x) admet une fonction réciproque et trouve cette fonction

3- Dans l'espace d'un repère orthonormal on donne les points :

A(1,-1,2) , B(1,2,1) , C(2,0,2) et D(3,1,-1)

a) Trouve l'aire du triangle ABC et déduis la distance de A à (BC) .

b) Trouve le volume du tetraèdre ABCD et déduis la distance de D à (ABC).

II-Famille de plans.

Dans l'espace d'un repère orthonormal Oxyz , on considère le point A(1,0,4) et les plans (P_m) :(m+3)x+(m-3)y+(1-m)z-1-m=0 , m est un paramètre réel .

1) Montre que ,quelque soit m , le plan (P_m) contient une droite fixe (D).

2) Démontre que (P_{-1}):2x-4y+2z=0 et (P_5):8x+2y-4z-6=0 sont perpendiculaires .

3) Calcule les distances de A à (P_{-1}) et (P_5) et Déduis la distance de A à (D).

4) Soit L le projété orthogonal de A sur (P_m)

   a) Démontre que , lorsque m varie , L décrit un cercle fixe (C) don't déterminera le rayon les coordonnées de son centre I , et l'équation de son plan.

   b) Ecris l'équation du plan (P_m) qui correspond à la plus grande valeur de AL.

III- Fonction Log.

Soit la fonction $f(x) = x - \ln x$ définie sur $]0,+\infty[$

a) Utilise les variations de $f(x)$ pour démontrer que x-lnx>0.

b) Soit $g(x) = \frac{x}{x - \ln x}$ si $x \in]0,+\infty[$ et g(0)=0 et (C) son graphe

1) Démontre g est continue à droite de zéro.
2) Etudie la dérivabilité de g(x) à droite de zéro ,et déduis la demi-tangente en O à (C).
3) Quelle est la limite de g(x) en $+\infty$.
4) Trouve g '(x) sur $]0,+\infty[$ et étudie les variations de g(x).
5) Trouve l'équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 1.
6) Construit cette tangente puis (C) .

IV- Utilisation d'une function pour ...

Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère le cercle (Γ) de centre O et de rayon 1 et le point I(1,0).

M et N sont deux points de ce cercle tels que (MN) $\perp$ à (OI) en H . On pose $\overrightarrow{OH} = x\vec{i}$

1-Calcule l'aire l'aire du triangle MNI en fonction de x.

2-Soit f la fonction définie par $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$

a) Trouve le domaine de définition de f et calcule f(-1) et f(1) .

b) Etudie la dérivabilité de f à droite de -1 et à gauche de 1 , Que peut-on déduire?

3-Démontre que $f'(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{1-x^2}}$ et étudie les variations de f.

4-Trace le graphe (C) de y=f(x) dans un repère orthonormal (Unité=4cm)

5-Pour quelle position de H , l'aire du triangle MNI est-elle maximale? Quelle est cette aire?

6-Détermine approximativement (à l'aide de (C)),pour quelle valeur de x ,autre que zéro ,

l'aire du triangle est égale à 1unité d'aire.

V-

A-Soit la fonction $g(x) = \dfrac{x - 2\ln x}{x}$ et sa courbe representative (C)

a)Trouve le domaine de définition de $g(x)$ et les limites $g(x)$ aux bornes de ce domaine.

b)Déduis les asymptotes de (C)

c)Etudie les variations de $g(x)$

d)trace (C)

B-Soit $f(x) = x - \ln^2(x)$ et sa courbe représentative (Γ)

1)Montre que $f'(x) \geq 0$ pour tout x>0 .

2)Détermine l'équation de la tangente (T) à (Γ) au point A d'abscisse 1,et étudie leurs positions.

3)Trouve le point d'inflexion I.

4)Construit (T) et (Γ) dans un meme repère.

5)Démontre que f admet une fonction réciproque.

6)Construit le graphe (Γ') de la fonction réciproque.

7)Une droite (d) d'équation y=-x+m coupe (Γ) en A et (Γ') en B '

Determine m si AB=$\sqrt{2}$.