Exercices fonction exponentielle pour la classe SG travaillé par Ghiwa Lakis

Email : ghiwalakis@gmail.com

Exercice 1: Exponentielle et suite:

Partie A

Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = (-x+2)e^x - 2$

1) Calculez la limite de g en $-\infty$, et donnez une interprétation graphique de cette limite
2) Calculez les limites de $g(x)$ *et de* $\frac{g(x)}{x}$ en $+\infty$, et donnez une interprétation graphique de ces limites.
3) Etudiez les variations de g
4) Montrez que l'équation g(x)=0 admet deux solutions 0 et α, et montrer que 1,5< α <2
5) Etudiez le signe de g(x).
6) Construisez le graphe (G) de g(x).

Partie B

Soit f la fonction sur IR par $f(x) = \frac{x^2}{e^x - 1}$ *si* $x \neq 0$ *et* $f(0) = 0$, et (C) son graphe dans un repère orthonormé.

1- a) Montrez que $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

b) En déduire les limites : $\lim_{x\to 0} \frac{x}{e^x - 1}$ *et* $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{e^x - 1}$

c) Montrez que f est continue et dérivable en 0.

2- Précisez une équation de la tangente (T) à (C) en O.

3- Calculez les limites de $f(x)$ *et de* $\frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$, et donnez une interprétation graphique de ces limites

4- Trouvez la limite de f en $+\infty$, et donnez une interprétation graphique de cette limite.

5- a) Calculez f '(x) et montrez que f '(x) a le signe de x.g(x)

b) En déduire le tableau de variations de f, et montrez que $f(\alpha) = \alpha(2-\alpha)$, (où α est le est le réel défini au A.4)

6- Tracez (T) la courbe (C) (Prendre $\alpha \approx 1.6$)

Partie C

Dans cette partie on prend x $\in$ [0;+∞[

1- Montrez que $f([0;1]) \subset [0;1]$
2- Soit $h(x) = e^x - x - 1$ Montrez que $f(x) = x$ équivaut à $h(x) = 0$
3- Etudiez les variations de h(x) sur [0;+∞[pour étudiez le signe de h(x).
4- Soit la suite (u_n), définie par $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = f(u_n)$,pour tout entier naturel n.

a- Montrez par récurrence que pour tout entier n on a $0 < u_n \leq 1$

b- Montrez que cette suite est décroissante.

c- En déduire que la suite est convergente et trouver sa limite.

Correction

A-1) $\lim\limits_{-\infty} g(x) = \lim\limits_{-\infty}[-xe^x + 2e^x - 2] = 0 + 0 - 2 = -2$, donc la droite d'équation y=-2 est asymptote en $-\infty$.

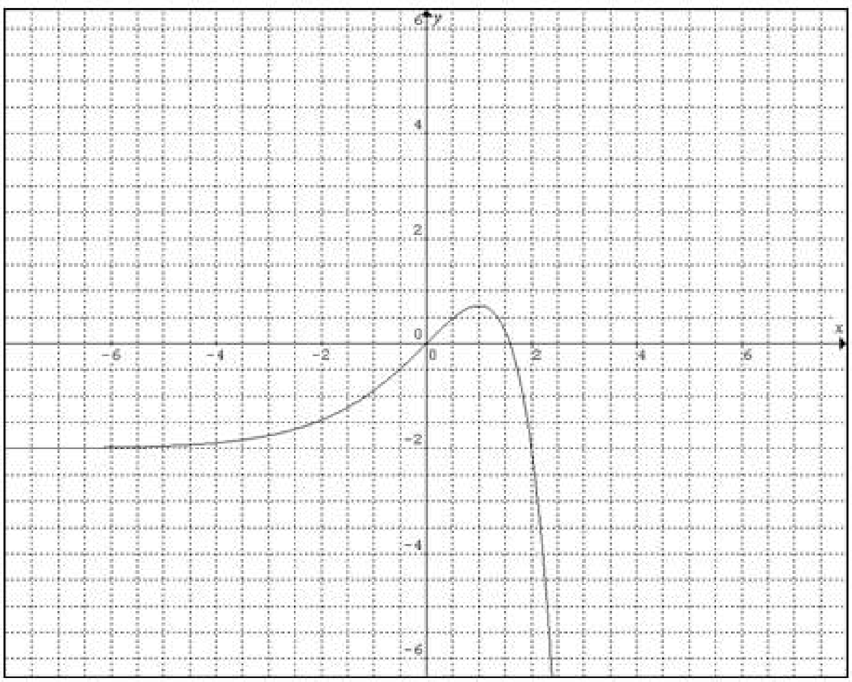
2) $\lim\limits_{+\infty} g(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{+\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty}[(-1+\frac{2}{x})e^x - \frac{2}{x}] = -\infty$, donc direction asymptotique parallèle à (y'y).

3) $g'(x) = -e^x + (-x+2)e^x = (-x+1)e^x$, a le signe de $-x+1$, donc si $x<1$ $g'(x)>0$ et si $x>1$ $g'(x)<0$ et on a un maximum=g(1)=e-2.

4) sur $]-\infty,1]$ g continue et croit de $-2<0$ à $e-2>0$ alors g(x)=0 admet une seule racine dans $]-\infty,1]$, c'est pour x=0 car g(0)=0, et sur $[1,+\infty[$ g continue et décroît de $e-2>0$ à $-\infty$ alors g(x)=0 admet une seule racine dans $[1,+\infty[$ pour $x=\alpha$, on a: $g(1,5) \approx 0,24 > 0$ et $g(2=-2<0$ donc $1,5 < \alpha < 2$.

5) $g(x)<0$ si $x<0$ ou $x>\alpha$, et $g(x)>0$ si $0<x<\alpha$.

6)



B- 1) a) $\lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{e^x-e^0}{x-0} = (e^x)'_{x=0} = e^0 = 1$

b) $\lim\limits_{x\to0} \frac{x}{e^x-1} = \frac{1}{1} = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^2}{e^x-1} = \lim\limits_{x\to0} x(\frac{x}{e^x-1}) = 0(1) = 0$.

c) $\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0}(\frac{x^2}{e^x-1}) = 0 = f(0)$, donc f est continue en 0.

.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\frac{x^2}{e^x-1}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{e^x-1} = 1$, donc f est dérivable en 0.

2) (T): $y = f'(0)(x-0) + f(0) = x$.

3) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{-\infty} (\dfrac{x^2}{e^x-1}) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{e^x-1} = +\infty$, donc direction asymptotique parallèle à (y'y).

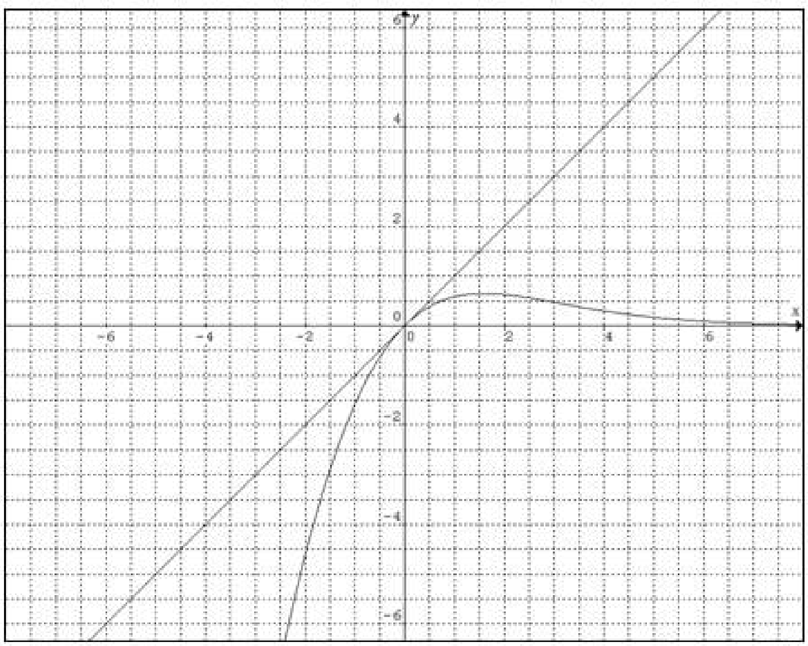
4) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, donc (x'x) est asymptote en $+\infty$

5) a) si $x \neq 0$ $f'(x) = \dfrac{2x(e^x-1)-x^2e^x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{x[2e^x-2-xe^x]}{(e^x-1)^2} = \dfrac{xg(x)}{(e^x-1)^2}$ a le signe de xg(x)

b) D'après le tableau de signe de xg(x) on obtient: f est croissante sur $]-\infty, \alpha]$ et f est décroissante sur $[\alpha, +\infty[$ et maximum= $f(\alpha)$. On a: $g(\alpha) = 0 \Rightarrow (-\alpha+2)e^\alpha - 2 = 0 \Rightarrow$

$e^\alpha = \dfrac{2}{2-\alpha} \Rightarrow f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{\frac{2}{2-\alpha}-1} = \dfrac{\alpha^2(2-\alpha)}{\alpha} = \alpha(2-\alpha)$

6)



C- 1) $0 \leq x \leq 1$ et f croissante sur [0,1] alors $f(0) \leq f(x) \leq f(1) \Rightarrow 0 \leq f(1) \leq \dfrac{1}{e-1} < 1$.

2) $f(x) = x \Leftrightarrow x^2 = x(e^x-1) \Leftrightarrow x(e^x-1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *ou* $h(x) = 0$ *et on a* $h(0) = 0$ *donc* $h(x) = 0$

3) $h'(x) = e^x - 1$, $h'(x) = 0$ *pour* $x = 0$ *et pour* $x > 0$ *on a* $h'(x) > 0$, donc h est croissante et h(0)=0 alors h(x)≥ 0 sur $[0, +\infty[$.

4) a) On a: $0 < u_n \leq 1$, supposons que $0 < u_n \leq 1$ alors $0 < f(u_n) \leq 1$ (d'après la question C-1)

donc $0 < u_n \leq 1$.

b) $u_{n+1}-u_n = f(u_n)-u_n = \dfrac{u_n^2}{e^{u_n}-1}-u_n = \dfrac{u_n^2-u_ne^{u_n}+u_n}{e^{u_n}-1} = \dfrac{-u_nh(u_n)}{e^{u_n}-1}$

on a: $0<u_n\le 1 \Rightarrow u_n>0$ *et* $e^{u_n}>1$ et $h(u_n)>0 \Rightarrow u_{n+1}-u_n<0$.

c) (u_n) décroissante et minorée par 0 alors elle est convergente vers l tel que $l=f(l) \Leftrightarrow h(l)=0$, et d'après les variations de h $h(l)=0$ pour l=0.

Exercice 2 : Exponentielle:

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{e^x-1}{xe^x+1}$,et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Partie A : Etude de fonctions auxiliaires.

1) Soit la fonction h définie sur IR par h(x)=xe^x+1
   a- Calculer la limite de h en $-\infty$,et étudier les variations de h.
   b- Démontrer que h(x)>0 et en déduire le domaine de définition de f .

2) Soit g la fonction définie sur IR par g(x)=$x+2-e^x$.
   a- Déterminer les limite de g en $-\infty$et en $+\infty$.
   b- Etudier les variations de g et dresser le tableau de variations de g.
   c- Montrer que l'équation g(x)=0 admet deux solutions α *et* β tels que -1,85<$\beta<$-1,84 et 1,14<α <1,15.
   d- En déduire le signe de g(x).

Partie B : Etude de la fonction f .

1) Déterminer les limite de f en $-\infty$et en $+\infty$, et interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{e^x g(x)}{(xe^x+1)^2}$.
   b) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser le tableau de variations.
   c) Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$

3) a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
   b) On donne u(x)=e^x-xe^x-1, vérifier que $f(x)-x=\dfrac{(x+1)u(x)}{xe^x+1}$
   c) Etudier le sens de variation de la fonction u(x) et en déduire son signe.
   d) Déduire la position de (C) par rapport à (T)

4) Tracer (T) et (C).

Correction

A 1) a) $\lim\limits_{-\infty} h(x)=0+1=1$ $h'(x)=e^{x}+xe^{x}=(1+x)e^{x}$ a le signe de x+1 donc minimum=h(-1)=$1-\frac{1}{e}$.

b) La valeur minimale de h(x) est: $1-\frac{1}{e}$>0 donc h(x)>0.

h(x) ne s'annule pas donc f(x) est définie sur IR.

2) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty+2-0=-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x[1+\frac{2}{x}-\frac{e^{x}}{x}]=-\infty$

b) $g'(x)=1-e^{x}$, g'(x)=0 pour x=0 et on a: maximum=g(0)=2-1=1.

c) sur $]-\infty,0]$, g continue et croît de $-\infty$ à 1>0 donc g(x)=0 admet une seule racine β dans $]-\infty,0]$, et sur $[0,+\infty[$, g continue et décroît de 1>0 à $-\infty$ donc g(x)=0 admet une seule racine α dans $[0,+\infty[$.

g(-1,85)$\approx$-0,007 et g(-1,84) $\approx$0,002 donc -1,85<β<-1,84 et

g(1,14) $\approx$0,014 et g(1,15) $\approx$-0,08 donc 1,14<α<1,15.

d) g(x)<0 pour x<β ou x>α, et g(x)>0 pour β<x<α.

B- 1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{0-1}{0+1}=-1$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{e^{x}}}{x+\frac{1}{e^{x}}}=\frac{1-0}{\infty+0}=0$

donc la droite d'équation y=-1 est asymptote en $-\infty$, et (x'x) est asymptote en $+\infty$.

2) a) $f'(x)=\frac{e^{x}(xe^{x}+1)-(e^{x}+xe^{x})(e^{x}-1)}{(xe^{x}+1)^{2}}=\frac{e^{x}(xe^{x}+1-e^{x}+1-xe^{x}+x)}{(xe^{x}+1)^{2}}=\frac{e^{x}.g(x)}{(xe^{x}+1)^{2}}$.

b) $f'(x)$ a le signe de g(x) donc minimum $=f(\beta)$ et maximum= $f(\alpha)$.

c) $g(\alpha)=0\Leftrightarrow e^{\alpha}=\alpha+2\Rightarrow f(\alpha)=\frac{\alpha+2-1}{\alpha(\alpha+2)+1}=\frac{\alpha+1}{\alpha^{2}+2\alpha+1}=\frac{1}{\alpha+1}$, de même $f(\beta)=\frac{1}{\beta+1}$.

3) a) (T): $y=f'(0)(x-0)+f(0)=x$.

b) $f(x)-x=\frac{e^{x}-1-x^{2}e^{x}-x}{xe^{x}+1}=\frac{e^{x}(1-x)(1+x)-(x+1)}{xe^{x}+1}=\frac{(x+1)(e^{x}-xe^{x}-1)}{xe^{x}+1}=\frac{(x+1)u(x)}{xe^{x}+1}$.

c) $u'(x)=e^{x}-e^{x}-xe^{x}=-xe^{x}$ a le signe de –x donc maximum=u(0)=1-0-1=0, alors u(x)≤ 0.

d) u(x)≤ 0 et $xe^{x}+1>0$, alors $f(x)-x$ a le signe de: -x-1.

Si x<-1 la courbe est au dessus de (T), et si x>-1 elle est au dessous de (T)

Et la courbe coupe (T) en (-1,-1) et sont tangentes en O.

4)