Exercices coniques pour la classe SG travaillé par Ghiwa Lakis

Email : ghiwalakis@gmail.com

Exercice 1 :Parabole

On donne une droite fixe D et un point F non situe sur D , H est un point variable de (D)
La perpendiculaire à D en H coupe la perpendiculaire menée de F à (FH) en N.
Soit M le milieu de [NH].

1- Montrer que M varie sur une parabole (P) dont on précisera le foyer et la directrice.
2- On rapporte le plan à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$. On donne $F(\frac{3}{2},-1)$ et D: x =-1

   a) Montrer que (P) a pour équation : $y^2-5x+2y+\frac{9}{4}=0$

   b) Préciser le sommet de (P). Tracer (P).
3- a) Vérifier que le point $A(\frac{21}{20},1)$ appartient à (P) puis écrire une équation de la tangente T à (P) en A.

   b) La droite T coupe D en point K. Montrer que le triangle AFK est rectangle en F.

Exercice 2 : Conique

Dans le plan d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ on donne le cercle (C) d'équation $x^2+y^2=a^2$ de diamètre [AB] tel que A(a,0). P un point de (C), la tangente (T) en P à (C) coupe la tangente (D) en A à (C) en S. La perpendiculaire menée de P à (AB) coupe (BS) en M. Trouver le lieu de M lorsque P décrit (C) .

Exercice 3 : Conique.

Dans le plan d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on donne le point A(-6,0) et (C) le cercle de diamètre [AO]. Soit P un point variable de (C) et soit K sa projection orthogonale sur (AO), on construit le point M tel que $\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{AP}$

1- Ecrire une équation de (C).
2- Montrer que l'ensemble des points M, lorsque P décrit (C), est la conique (E) d'équation : $x^2+4y^2-36=0$.
3- Préciser la nature de (E), son centre, l'axe focal, les sommets, les foyers, les directrices, et l'excentricité.

Exercice 4 : Conique.

Le plan est rapport un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$

.L'unité graphique est 4 cm. On considère les points A(1; 0), C(0; 1), D(0 ;−1) et le cercle (Γ) de centre O et de rayon 1. Soit M un point du cercle (Γ), d'ordonnée positive ou nulle, et distinct de C. La droite (DM) rencontre l'axe des abscisses au point I.

Le point N est le point d'intersection de la droite (OM) et de la parallèle la droite(CD) passant par I.

1. Réaliser la figure.
2. On note t une mesure de l'angle orienté $(\vec{i},\overrightarrow{OM})$

   On se propose de déterminer l'ensemble (F) décrit par le point N lorsque t décrit l'intervalle [0;π] privé de $\frac{\pi}{2}$.

   a. Déterminer les coordonnées de M en fonction de t.

   b. Montrer que les coordonnées de I sont $(\frac{\cos t}{1+\sin t},0)$; puis que les coordonnées x(t) et y(t) de N sont : x(t)=$\frac{\cos t}{1+\sin t}$ et y(t)=$\frac{\sin t}{1+\sin t}$.
3. a. Comparer d'une part x(t) et x(π−t), puis d'autre part y(t) et y(π−t). En déduire une propriété géométrique de l'ensemble (F).

   b. Faire l'étude des variations des fonctions x(t) et y(t) sur $[0,\frac{\pi}{2}[$

   c. Déterminer les limites de x(t) et y(t) quand t tend vers $\frac{\pi}{2}$.
4. a. Calculer, en fonction de t, la distance ON puis la distance de N à la Droite d'équation y=1.

   b. En déduire que (F) est inclus dans une conique dont on précisera a nature et les éléments.

   c. Tracer l'ensemble (F).

Exercice 5 : Conique.

Soit $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormé du plan. On considère la courbe (C) de représentation paramétrique :x=3cost et y=2sint où t décrit l'intervalle [0 ; 2π].

1. Reconnaître la nature de la courbe (C) et en donner l'équation cartésienne. Tracer (C) (unité graphique 2 cm).
2. Exprimer en fonction de t, l'affixe z d'un point M(t) de (C).
3. Soit A le point d'affixe 2. Pour tout point M de (C), on construit le point M′tel que le triangle AM M′soit direct, rectangle en A et tel que : AM′= $\frac{1}{2}$ AM.

a. Montrer que M′ est l'image de M par une similitude directe que l'on précisera.
b. Exprimer l'affixe z′ de M′ en fonction de t.
c. En déduire une représentation paramétrique de l'ensemble des points M′lorsque M décrit (C).
d. Montrer que M′ appartient à la courbe (C′) d'équation cartésienne :

$$(x-2)^2+\frac{4}{9}(y+1)^2=1$$

e. Montrer que (C') est une conique dont on précisera le centre,les foyers et les directrices.

Exercice 6 : Conique

On donne dans le plan un cercle (C) et [AA'] et [BB'] deux diamètres perpendiculaires de (C). M est un point variable de (C), N est la projection orthogonale de M sur (BB'), les droites (OM) et (AN) se coupent en un point I.

La perpendiculaire menée de I à (BB') coupe (BB') en K et la tangente en A à (C) en H.

1) Faire une figure
2) Evaluer le rapport $\frac{NK}{NO}$ par deux manières pour déduire que IM=IK et IO=IH.
(On distingue deux cas M sur l'arc (BB') contenant A, et sur l'arc (BB') contenant A')
3) En déduire que I se déplace sur une parabole dont on déterminera le foyer et la directrice.
4) On considère le repère du plan $(O,\vec{i},\vec{j})$ tel que $\vec{i}=\frac{1}{OA}.\overrightarrow{OA}$ et $\vec{j}=\frac{1}{OB}.\overrightarrow{OB}$ alors on aura A(R,0) où R est le rayon de (C) et M(x_0,y_0) tel que $x_0^2+y_0^2=R^2$
  a) Trouver des équations des droites (OM) et (AN), et en déduire les coordonnées de I en fonction de x_0 et y_0 et R
  b) Trouver x_0 et y_0 en fonction de x_I et y_I .
  c) Trouver une relation entre x_I et y_I et retrouver le résultat de la question (3).
  d) Trouver le sommet et tracer cette parabole sur la figure.