Exercices fonction exponentielle pour la classe SG travaillé par Ghiwa Lakis

Email : ghiwalakis@gmail.com

Exercice 1: Exponentielle et suite:

Partie A

Soit g la fonction définie sur IR par $g(x)=(-x+2)e^{x}-2$

1) Calculez la limite de g en $-\infty$, et donnez une interprétation graphique de cette limite
2) Calculez les limites de $g(x)$ et de $\frac{g(x)}{x}$ en $+\infty$, et donnez une interprétation graphique de ces limites.
3) Etudiez les variations de g
4) Montrez que l'équation g(x)=0 admet deux solutions 0 et α, et montrer que 1,5< α <2
5) Etudiez le signe de g(x).
6) Construisez le graphe (G) de g(x).

Partie B

Soit f la fonction sur IR par $f(x)=\frac{x^{2}}{e^{x}-1}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$, et (C) son graphe dans un repère orthonormé.

1- a) Montrez que $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1$

b) En déduire les limites : $\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^{x}-1}$ et $\lim_{x\to 0}\frac{x^{2}}{e^{x}-1}$

c) Montrez que f est continue et dérivable en 0.

2- Précisez une équation de la tangente (T) à (C) en O.

3- Calculez les limites de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$, et donnez une interprétation graphique de ces limites

4- Trouvez la limite de f en $+\infty$, et donnez une interprétation graphique de cette limite.

5- a) Calculez f '(x) et montrez que f '(x) a le signe de x.g(x)

b) En déduire le tableau de variations de f, et montrez que $f(\alpha)=\alpha(2-\alpha)$, (où α est le est le réel défini au A.4)

6- Tracez (T) la courbe (C) (Prendre $\alpha\approx 1.6$)

Partie C

Dans cette partie on prend $x\in[0;+\infty[$

1- Montrez que $f([0;1])\subset[0;1]$
2- Soit $h(x)=e^{x}-x-1$ Montrez que $f(x)=x$ équivaut à $h(x)=0$
3- Etudiez les variations de h(x) sur $[0;+\infty[$ pour étudiez le signe de h(x).
4- Soit la suite (u_n), définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=f(u_n)$, pour tout entier naturel n.

a- Montrez par récurrence que pour tout entier n on a $0<u_n\leq 1$

b- Montrez que cette suite est décroissante.

c- En déduire que la suite est convergente et trouver sa limite.

Correction

A-1) $\lim\limits_{-\infty} g(x) = \lim\limits_{-\infty}[-xe^x + 2e^x - 2] = 0 + 0 - 2 = -2$, donc la droite d'équation y=-2 est asymptote en $-\infty$.

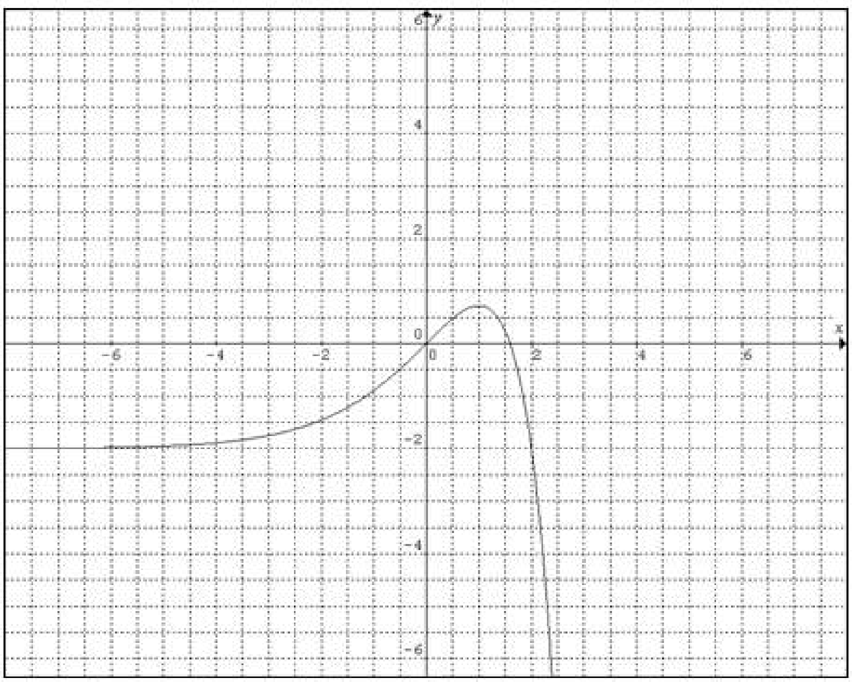
2) $\lim\limits_{+\infty} g(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty}[(-1+\dfrac{2}{x})e^x - \dfrac{2}{x}] = -\infty$, donc direction asymptotique parallèle à (y'y).

3) $g'(x) = -e^x + (-x+2)e^x = (-x+1)e^x$, a le signe de –x+1, donc si x<1 g'(x)>0 et si x>1 g'(x)<0 et on a un maximum=g(1)=e-2.

4) sur $]-\infty,1]$ g continue et croit de -2<0 à e-2>0 alors g(x)=0 admet une seule racine dans $]-\infty,1]$, c'est pour x=0 car g(0)=0, et sur $[1,+\infty[$ g continue et décroît de e-2>0 à $-\infty$ alors g(x)=0 admet une seule racine dans $[1,+\infty[$ pour x=α, on a:
g(1,5)$\approx 0{,}24 > 0$ et g(2=-2<0 donc $1{,}5 < \alpha < 2$.

5) g(x)<0 si x<0 ou x>α, et g(x)>0 si 0<x<α.

6)



B- 1) a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^0}{x-0} = (e^x)'_{x=0} = e^0 = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x - 1} = \dfrac{1}{1} = 1$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{e^x - 1} = \lim\limits_{x\to 0} x(\dfrac{x}{e^x - 1}) = 0(1) = 0$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{x^2}{e^x - 1}) = 0 = f(0)$, donc f est continue en 0.

.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{e^x-1}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^x-1}=1$, donc f est dérivable en 0.

2) (T): $y=f'(0)(x-0)+f(0)=x$.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{-\infty}(\dfrac{x^2}{e^x-1})=-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^x-1}=+\infty$, donc direction asymptotique parallèle à (y'y).

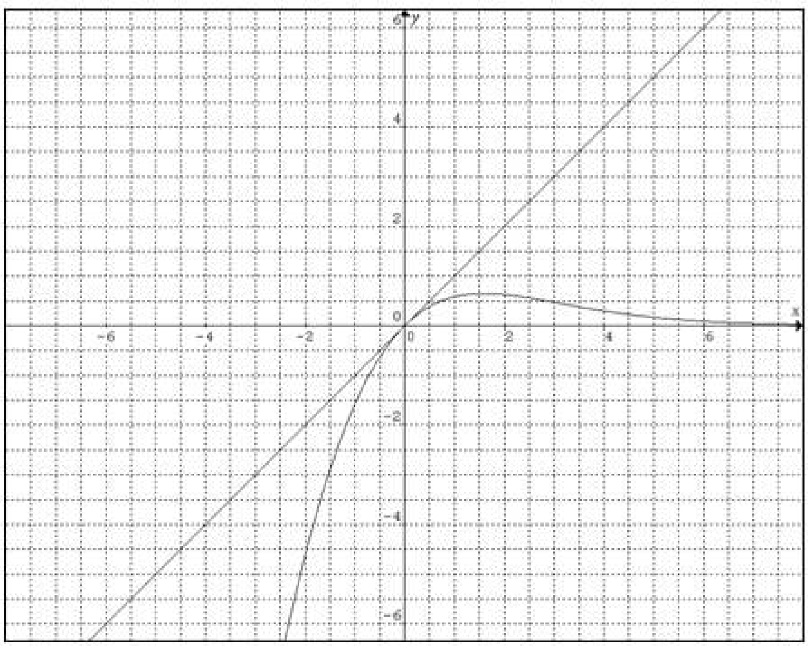
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, donc (x'x) est asymptote en $+\infty$

5) a) si $x\neq 0$ $f'(x)=\dfrac{2x(e^x-1)-x^2e^x}{(e^x-1)^2}=\dfrac{x[2e^x-2-xe^x]}{(e^x-1)^2}=\dfrac{xg(x)}{(e^x-1)^2}$ a le signe de xg(x)

b) D'après le tableau de signe de xg(x) on obtient: f est croissante sur $]-\infty,\alpha]$ et f est décroissante sur $[\alpha,+\infty[$ et maximum= $f(\alpha)$. On a: $g(\alpha)=0\Rightarrow(-\alpha+2)e^\alpha-2=0\Rightarrow$

$e^\alpha=\dfrac{2}{2-\alpha}\Rightarrow f(\alpha)=\dfrac{\alpha^2}{\dfrac{2}{2-\alpha}-1}=\dfrac{\alpha^2(2-\alpha)}{\alpha}=\alpha(2-\alpha)$

6)



C- 1) $0\leq x\leq 1$ et f croissante sur [0,1] alors $f(0)\leq f(x)\leq f(1)\Rightarrow 0\leq f(1)\leq\dfrac{1}{e-1}<1$.

2) $f(x)=x\Leftrightarrow x^2=x(e^x-1)\Leftrightarrow x(e^x-1-x)=0\Leftrightarrow x=0$ *ou* $h(x)=0$ *et on a* $h(0)=0$ *donc* $h(x)=0$

3) $h'(x)=e^x-1$, $h'(x)=0$ *pour* $x=0$ *et pour* $x>0$ *on a* $h'(x)>0$, donc h est croissante et h(0)=0 alors h(x)≥ 0 sur $[0,+\infty[$.

4) a) On a: $0<u_n\leq 1$, supposons que $0<u_n\leq 1$ alors $0<f(u_n)\leq 1$ (d'après la question C-1)

donc $0<u_n\leq 1$.

b) $u_{n+1}-u_n=f(u_n)-u_n=\dfrac{u_n^2}{e^{u_n}-1}-u_n=\dfrac{u_n^2-u_ne^{u_n}+u_n}{e^{u_n}-1}=\dfrac{-u_nh(u_n)}{e^{u_n}-1}$

on a: $0<u_n\le 1\Rightarrow u_n>0$ *et* $e^{u_n}>1$ et $h(u_n)>0\Rightarrow u_{n+1}-u_n<0$.

c) (u_n) décroissante et minorée par 0 alors elle est convergente vers l tel que $l=f(l)\Leftrightarrow$ $h(l)=0$, et d'après les variations de h $h(l)=0$ pour l=0.

Exercice 2 : Exponentielle:

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{e^x-1}{xe^x+1}$,et on désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Partie A : Etude de fonctions auxiliaires.

1) Soit la fonction h définie sur IR par h(x)= xe^x+1
   a- Calculer la limite de h en $-\infty$,et étudier les variations de h.
   b- Démontrer que h(x)>0 et en déduire le domaine de définition de f.
2) Soit g la fonction définie sur IR par g(x)= $x+2-e^x$.
   a- Déterminer les limite de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b- Etudier les variations de g et dresser le tableau de variations de g.
   c- Montrer que l'équation g(x)=0 admet deux solutions α *et* β tels que
      -1,85< β < -1,84 et 1,14< α <1,15.
   d- En déduire le signe de g(x).

Partie B : Etude de la fonction f.

1) Déterminer les limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$, et interpréter graphiquement les résultats.
2) a) Montrer que $f'(x)=\dfrac{e^xg(x)}{(xe^x+1)^2}$.
   b) En déduire le sens de variation de la fonction f et dresser le tableau de variations.
   c) Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$
3) a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
   b) On donne u(x)= e^x-xe^x-1, vérifier que $f(x)-x=\dfrac{(x+1)u(x)}{xe^x+1}$
   c) Etudier le sens de variation de la fonction u(x) et en déduire son signe.
   d) Déduire la position de (C) par rapport à (T)
4) Tracer (T) et (C).

Correction

A 1) a) $\lim\limits_{-\infty} h(x)=0+1=1$ $h'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$ a le signe de x+1 donc minimum=h(-1)=$1-\frac{1}{e}$.

b) La valeur minimale de h(x) est: $1-\frac{1}{e}$>0 donc h(x)>0.

h(x) ne s'annule pas donc f(x) est définie sur IR.

2) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty+2-0=-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x[1+\frac{2}{x}-\frac{e^x}{x}]=-\infty$

b) $g'(x)=1-e^x$, g'(x)=0 pour x=0 et on a: maximum=g(0)=2-1=1.

c) sur $]-\infty,0]$, g continue et croît de $-\infty$ à 1>0 donc g(x)=0 admet une seule racine β dans $]-\infty,0]$, et sur $[0,+\infty[$, g continue et décroît de 1>0 à $-\infty$ donc g(x)=0 admet une seule racine α dans $[0,+\infty[$.

g(-1,85)$\approx$-0,007 et g(-1,84) $\approx$0,002 donc -1,85<β<-1,84 et

g(1,14) $\approx$0,014 et g(1,15) $\approx$-0,08 donc 1,14<α<1,15.

d) g(x)<0 pour x<β ou x>α, et g(x)>0 pour β<x<α.

B- 1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\frac{0-1}{0+1}=-1$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{e^x}}{x+\frac{1}{e^x}}=\frac{1-0}{\infty+0}=0$

donc la droite d'équation y=-1 est asymptote en -∞, et (x'x) est asymptote en $+\infty$.

2) a) $f'(x)=\frac{e^x(xe^x+1)-(e^x+xe^x)(e^x-1)}{(xe^x+1)^2}=\frac{e^x(xe^x+1-e^x+1-xe^x+x)}{(xe^x+1)^2}=\frac{e^x.g(x)}{(xe^x+1)^2}$.

b) $f'(x)$ a le signe de g(x) donc minimum $=f(\beta)$ et maximum= $f(\alpha)$.

c) $g(\alpha)=0\Leftrightarrow e^\alpha=\alpha+2\Rightarrow f(\alpha)=\frac{\alpha+2-1}{\alpha(\alpha+2)+1}=\frac{\alpha+1}{\alpha^2+2\alpha+1}=\frac{1}{\alpha+1}$, de même $f(\beta)=\frac{1}{\beta+1}$.

3) a) (T): $y=f'(0)(x-0)+f(0)=x$.

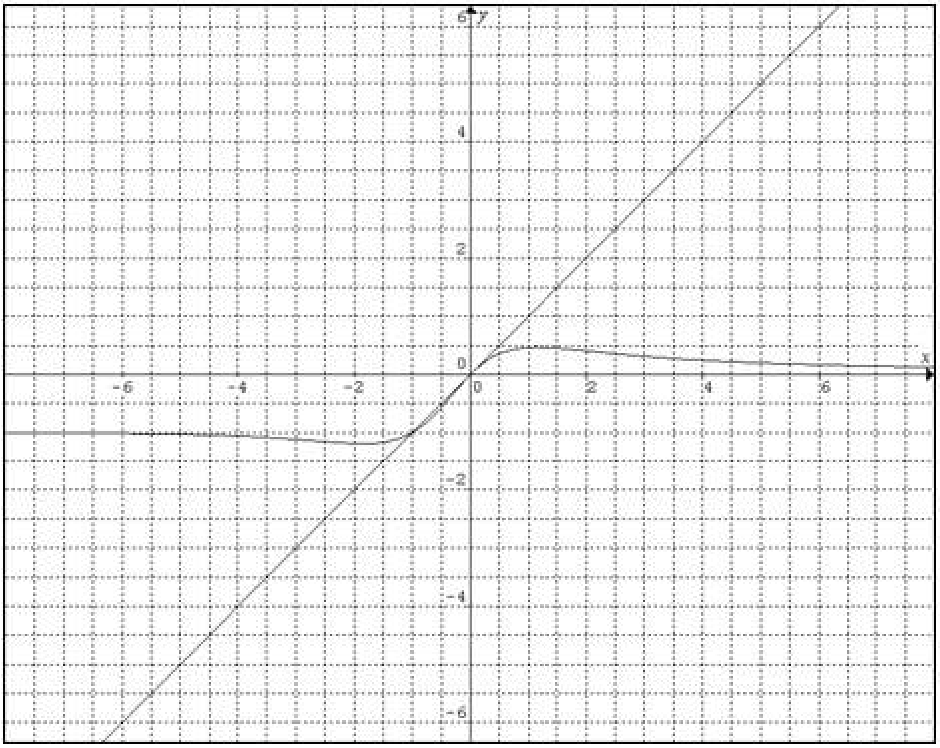
b) $f(x)-x=\frac{e^x-1-x^2e^x-x}{xe^x+1}=\frac{e^x(1-x)(1+x)-(x+1)}{xe^x+1}=\frac{(x+1)(e^x-xe^x-1)}{xe^x+1}=\frac{(x+1)u(x)}{xe^x+1}$.

c) $u'(x)=e^x-e^x-xe^x=-xe^x$ a le signe de –x donc maximum=u(0)=1-0-1=0, alors u(x)≤ 0.

d) u(x)≤ 0 et $xe^x+1>0$, alors $f(x)-x$ a le signe de: -x-1.

Si x<-1 la courbe est au dessus de (T), et si x>-1 elle est au dessous de (T)
Et la courbe coupe (T) en (-1,-1) et sont tangentes en O.

4)



-