Exercices suite pour la classe SG travaillé par Ghiwa Lakis

Email : ghiwalakis@gmail.com

Exercice 1 : Suite

On considère la suite numérique $I_n = \int_0^1 \ln(1+x^n)dx$ avec $n \in IN^*$ et $x \geq 0$

1- Calculer I_0 et I_1

2- Montrer que $I_n \geq 0$, pour tout n

3- Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

4- En déduire que cette suite est convergente.

5- Soit la fonction $f(x) = \ln(1+x) - x$ où x est un réel dans l'intervalle [0,1].

  a- Etudier les variations de $f(x)$ sur [0,1]

  b- Déduire que $f(x) \leq 0$ et que $\ln(1+x^n) \leq x^n$

  c- Déduire la limite de (I_n).

Correction

1) $I_0 = \int_0^1 \ln(2)dx = \ln(2)x]_0^1 = \ln 2$

Et $I_1 = \int_0^1 \ln(1+x)dx$ par parties u=ln(1+x) et v'=1, $u' = \frac{1}{1+x}$ et v=x donc

$$I_1 = u.v]_0^1 - \int_0^1 u'vdx = x\ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x+1}dx = x\ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 (1-\frac{1}{1+x})dx = x\ln(1+x) - x + \ln(1+x)]_0^1 = 2\ln 2 - 1$$

2) $x \geq 0 \Rightarrow x^n \geq 0 \Rightarrow 1+x^n \geq 1 \Rightarrow \ln(1+x^n) \geq 0$ *et* $0 < 1$ *donc* $I_n \geq 0$

3) $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^{n+1} \leq x^n \Rightarrow 1+x^{n+1} \leq 1+x^n$ *et on a* $\ln$ *croissante donc* $\ln(1+x^{n+1}) \leq \ln(1+x^n) \Rightarrow I_{n+1} \leq I_n$

4) I_n décroissante et minorée par 0 donc elle est convergente.

5) a- $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \leq 0$ *car* $x \geq 0$

  b- $f(0) = \ln 1 - 0 = 0$ *et* f *décroissante donc* $f(x) \leq f(0) = 0$

  On a $0 \leq x^x \leq 1$ *donc* $f(x^n) \leq 0$ *alors* $\ln(1+x^n) \leq x^n$

  c- $0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}]_0^1 = \frac{1}{n+1}$ *donc* $0 \leq \lim_{n\to\infty} I_n \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ *alors* $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$

Exercice 2 : Suite convergente:

Soit la suite (u_n) définie sur IN^* par $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}$

A- 1) Montrer que $u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$ et déduire le sens de variations de (u_n).

2) Montrer que (u_n) est convergente.

B- Trouvons la limite de cette suite.

Soit la fonction $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(\frac{x}{x+1})$, $x > 0$

1) a- Justifier que $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n}$

b- Vérifier que $\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{n} - f(n)$

c- En déduire que $0 \leq f(n) \leq \frac{1}{n(n+1)}$

2) Soit la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k(k+1)}$

a- Montrer que $0 \leq f(n) + f(n+1) + ... + f(2n) \leq S_n$

b- Déterminer a et b tels que pour tout x différent de 0 et de 1 on a: $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$

c- En déduire que $S_n = \frac{n+1}{n(2n+1)}$ et déterminer $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} f(k)$

d- Vérifier que $\sum_{k=n}^{2n} f(k) = u_n - \ln(2 + \frac{1}{n})$

e- Déterminer la limite de (u_n).

Correction

A- 1) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - (\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{2n}) = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n}$

$= \frac{2n^2 + 2n + 2n^2 + n - 4n^2 - 4n - 2n - 2}{n(2n+1)(2n+2)} = \frac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)} < 0$ Donc u_n est décroissante

2) u_n est la somme de termes positifs alors u_n>0, elle est décroissante et minorée

Donc elle est convergente.

B- 1-a) $n \leq x \leq n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow \int_n^{n+1} \frac{1}{n+1} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{n} dx \Rightarrow \frac{x}{n+1}]_n^{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{x}{n}]_n^{n+1}$

Donc $\frac{1}{n+1} \leq \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{n}$

b) $\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx = \ln x]_n^{n+1} = \ln(n+1) - \ln(n) = \ln(\frac{n+1}{n}) = -\ln(\frac{n}{n+1}) = \frac{1}{n} - f(n)$.

c) $\dfrac{1}{n+1} \leq \displaystyle\int_n^{n+1} \dfrac{1}{x}dx \leq \dfrac{1}{n}$ donc $\dfrac{1}{n+1} \leq \dfrac{1}{n} - f(n) \leq \dfrac{1}{n} \Rightarrow \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} \leq -f(n) \leq 0 \Rightarrow 0 \leq f(n) \leq \dfrac{1}{n(n+1)}$.

2- a) $0 \leq f(n) \leq \dfrac{1}{n(n+1)}$ *et* $0 \leq f(n+1) \leq \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$ *et ...et* $0 \leq f(2n) \leq \dfrac{1}{2n(2n+1)}$

Ajoutons membre à membre : $0 \leq f(n) + f(n+1) + ... + f(2n) \leq S_n$.

b) $\dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{ax+a+bx}{x(x+1)} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$

c)

$$S_n = \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + ... + \frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + ...$$

$$+ \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+1} = \frac{2n+1-n}{n(2n+1)} = \frac{n+1}{n(2n+1)}$$

$\lim\limits_{\infty} S_n = \lim\limits_{\infty} \dfrac{n}{2n^2} = 0$ *et alors* $0 \leq \lim\limits_{\infty} \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} f(k) \leq 0$ *donc* $\lim\limits_{\infty} \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} f(k) = 0$.

d) $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} f(k) = f(n) + f(n+1) + ... + f(2n) = \dfrac{1}{n} + \ln(\dfrac{n}{n+1}) + \dfrac{1}{n+1} + \ln(\dfrac{n+1}{n+2}) + ... + \dfrac{1}{2n} + \ln(\dfrac{2n}{2n+1})$

$= u_n + \ln(\dfrac{n(n+1)(n+2)...(2n-1)(2n)}{(n+1)(n+2)....(2n)(2n+1)}) = u_n + \ln(\dfrac{n}{2n+1}) = u_n - \ln(\dfrac{2n+1}{n}) = u_n - \ln(2 + \dfrac{1}{n})$.

e) $\lim\limits_{\infty} \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} f(k) = 0$ *donc* $\lim\limits_{\infty} [u_n - \ln(2 + \dfrac{1}{n})] = 0 \Rightarrow \lim\limits_{\infty} u_n = \lim\limits_{\infty} \ln(2 + \dfrac{1}{n}) = \ln 2$.